

Научная статья
УДК 517.926, 629.12
<https://doi.org/10.24143/2072-9502-2026-3-19-28>
EDN CJXDTB

Математическая модель оптимального вырожденного непрерывно-дискретного оценивания состояния автономного необитаемого подводного аппарата

***Вадим Александрович Крамарь, Дмитрий Викторович Ко,
Иван Юрьевич Липко[✉], Роман Денисович Якунин***

*Севастопольский государственный университет,
Севастополь, Россия, ivanlipko@yandex.ru[✉]*

Аннотация. Рассматривается разработка математической модели оптимального вырожденного непрерывно-дискретного оценивания состояния линейной системы управления автономным необитаемым подводным аппаратом (АНПА) при наличии точных и зашумленных измерений. Важность разработки предложенного подхода заключается в возможности его применения в навигационно-управляющих системах АНПА, функционирующих в условиях непостоянной доступности точных навигационных средств под водой. Формулируется математическая постановка задачи вырожденного непрерывно-дискретного оценивания на базе применения непрерывно-дискретного фильтра Калмана с учетом особенностей вырожденного случая. Путем сведения задачи вырожденного непрерывно-дискретного оценивания состояния АНПА к задаче оптимального детерминированного управления с вырожденным квадратическим критерием получено решение исходной задачи при помощи принципа двойственности. Разработана комплексная модель системы навигации АНПА, использующая комбинированную информацию от непрерывных датчиков (инерциальная навигационная система) и дискретных измерений (спутниковая система навигации, гидроакустическая система навигации). Приведены результаты численного моделирования, показывающие возможность повышения точности оценки состояния за счет использования всех доступных измерений. Рассмотрен случай, когда ковариационная матрица шума измерений является вырожденной, что позволяет применить специальные методы синтеза оптимального стохастического наблюдателя. Использование вырожденности матрицы шумов существенно снижает порядок динамической части оценщика и потенциально сокращает вычислительные затраты на реализацию алгоритма на 25–30 %. Показано, что в практических навигационных системах АНПА вырожденность матрицы интенсивностей шумов измерений возникает естественным образом, при использовании датчиков различной точности. Полученные результаты применимы к системам управления конечного состояния с терминальными условиями и могут быть обобщены на нелинейные системы.

Ключевые слова: вырожденное оценивание, непрерывно-дискретный фильтр Калмана, автономный необитаемый подводный аппарат, навигация, оптимальный наблюдатель, вырожденная матрица шумов

Благодарности: авторы выражают благодарность за финансовую поддержку Российскому научному фонду (проект № 25-29-01163).

Для цитирования: Крамарь В. А., Ко Д. В., Липко И. Ю., Якунин Р. Д. Математическая модель оптимального вырожденного непрерывно-дискретного оценивания состояния автономного необитаемого подводного аппарата // Вестник Астраханского государственного технического университета. Серия: Управление, вычислительная техника и информатика. 2026. № 3. С. 19–28. <https://doi.org/10.24143/2072-9502-2026-3-19-28>. EDN CJXDTB.

Original article

Mathematical model of optimal degenerate continuous-discrete state estimation of an autonomous unmanned underwater vehicle

Vadim A. Kramar, Dmitrii V. Ko, Ivan Yu. Lipko[✉], Roman D. Yakunin

*Sevastopol State University,
Sevastopol, Russia, ivanlipko@yandex.ru[✉]*

Abstract. The article is devoted to the development of a mathematical model for optimal degenerate continuous-discrete estimation of the state of a linear control system for an autonomous unmanned underwater vehicle (AUUV) in

the presence of accurate and noisy measurements. The relevance of the proposed approach lies in the possibility of its application in navigation and control systems of AUUV operating in conditions of unstable availability of accurate navigation aids underwater. The article formulates a mathematical formulation of the problem of degenerated continuous-discrete estimation based on the use of a continuous-discrete Kalman filter, taking into account the features of the degenerated case. By reducing the problem of a degenerate continuous-discrete estimation of the state of AUUV to the problem of optimal deterministic control with a degenerated quadratic criterion, a solution to the original problem using the duality principle is obtained. A comprehensive model of the AUUV navigation system has been developed using combined information from continuous sensors (inertial navigation system) and discrete measurements (satellite navigation system, hydroacoustic navigation system). The results of numerical modeling are presented, showing the possibility of state estimation accuracy by using all available measurements. The case is considered when the matrix of measurement noise intensities is degenerate, which makes it possible to apply special synthesis methods for an optimal stochastic observer. Using the degeneracy of the noise matrix significantly reduces the order of the dynamic part of the estimator and potentially reduces the computational cost of implementing the algorithm by 25-30%. It is shown that in practical AUUV navigation systems, the degeneracy of the measurement noise intensity matrix occurs naturally when using sensors of varying accuracy. The results obtained are applicable to finite state control systems with terminal conditions and can be generalized to nonlinear systems.

Keywords: degenerate estimation, continuous-discrete Kalman filter, autonomous unmanned underwater vehicle, navigation, optimal observer, degenerated noise matrix

Acknowledgment: the authors would like to thank the Russian Science Foundation for its financial support (project No. 25-29-01163).

For citation: Kramar V. A., Ko D. V., Lipko I. Yu., Yakunin R. D. Mathematical model of optimal degenerate continuous-discrete state estimation of an autonomous unmanned underwater vehicle. *Vestnik of Astrakhan State Technical University. Series: Management, computer science and informatics*. 2026;3:19-28. (In Russ.). <https://doi.org/10.24143/2072-9502-2026-3-19-28>. EDN CJXDTB.

Введение

Современный этап развития автономных необитаемых подводных аппаратов (АНПА) характеризуется ужесточением требований к точности их движения, прежде всего к допустимым отклонениям от заданной траектории. Это обуславливает необходимость повышения точности определения координат АНПА и приводит к использованию нескольких измерительных каналов одновременно [1]. В настоящее время широкое распространение получили комплексные методы навигации, основанные на объединении и оптимальной обработке информации, поступающей от различных непрерывных и дискретных источников навигационных данных [2–5]: инерциальной навигационной системы (ИНС), спутниковой системы навигации (ССН) и т. д. Оптимальное определение положения АНПА должно базироваться на совместной обработке всех доступных измерений, а не на раздельном использовании отдельных подсистем.

Эффективным инструментом решения задач комплексирования измерительной информации является фильтр Калмана [6–10], однако его применение в рассматриваемых задачах усложняется тем, что используемые измерительные средства могут функционировать как в непрерывном, так и в дискретном режимах времени [11].

Задачи комплексирования непрерывных и дискретных измерительных каналов естественным образом возникают в классе нестационарных систем управления конечным состоянием [12], отличительной особенностью которых является наличие терминальных условий. Для таких систем задача оптимальной непрерывно-дискретной фильтрации приво-

дит к построению непрерывно-дискретного фильтра Калмана, который представляет собой динамическую систему, принимающую на вход непрерывные и дискретные измерения, а также известные управляющие воздействия, и формирующую на выходе оптимальную оценку вектора состояния исходной системы. В классической теории линейной оптимальной фильтрации предполагается, что шумы в каналах измерения являются белыми гауссовскими случайными процессами с невырожденными матрицами интенсивностей [13]. На практике возникают ситуации, когда точность отдельных измерительных каналов значительно превышает точность остальных, и влиянием шумов в таких каналах можно пренебречь. В этом случае возникает необходимость построения оценки состояния по измерениям с вырожденной матрицей интенсивностей шумов [14, 15]. Решение данной задачи приводит к синтезу оптимального наблюдателя, характерной особенностью которого является уменьшение порядка динамической части оценщика по сравнению с порядком исходной системы [16]. Это позволяет не только корректно учитывать наличие точных измерений, но и снижать вычислительные затраты при реализации алгоритма оценивания.

Целью статьи является разработка математической модели оптимальной вырожденной непрерывно-дискретной оценки состояния линейной системы управления АНПА в условиях совмещенного использования точных и зашумленных измерений, позволяющей снизить вычислительные затраты и повысить точность навигации по сравнению с применением только непрерывных измерений.

Задача вырожденного непрерывно-дискретно-го оценивания

Модель непрерывно-дискретной системы при

$$\dot{x}(t) = A^H(t)x(t) + B^H(t)u^H(t) + w^H(t), \quad t_k < t < t_{k+1}; \quad (1)$$

$$x(t_k + 0) = A^g(k)x(t_k - 0) + B^g(k)u^g(k) + w^g(k), \quad t_k \in \theta; \quad (2)$$

$$x(t_0 - 0) = x_0, \quad t \in [t_0, t_f], \quad (3)$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния; $u^H(t) \in \mathbb{R}^{r^H}$, $u^g(k) \in \mathbb{R}^{r^g}$ – векторы детерминированных непрерывных и дискретных управляющих воздействий; $w^H(t)$, $w^g(k)$ – векторы непрерывных и дискретных случайных возмущений, которые центрированы, некоррелированы между собой и вектором начального состояния; $A^H(t)$, $B^H(t)$, $A^g(k)$, $B^g(k)$ – известные матричные функции

$$k = k(t) = [t] = \max\{i : t_i < t, t_i \in \theta\}, \quad (4)$$

где $\theta = \{t_1, t_2, \dots, |\inf(t_{i+1} - t_i) \geq \mu > 0\}$ – множество моментов времени.

Предполагается, что вектор состояния $x(t)$ измеряется на всем рассматриваемом интервале и в дискретные моменты $t_k \in \theta$. Векторы непрерывных и дискретных измерений определяются соотношениями

$$\begin{aligned} y^H(t) &= C^H(t)x(t) + v^H(t); \\ y^g(k) &= C^g(k)x(t_k + 0) + v^g(k), \end{aligned} \quad (5)$$

где $y^H(t)$, $y^g(k)$ – это m^H , m^g – мерные векторы непрерывных и дискретных измерений соответственно; $v^H(t)$, $v^g(k)$ – векторы ошибок (шумов) измерений, которые являются случайными процессами и последовательностями типа гауссового белого шума; $C^H(t)$, $C^g(k)$ – известные матрицы измерений.

Если часть непрерывных и дискретных измерений осуществляется точно, то уравнения непрерывных измерений могут быть представлены в виде

$$y_1^H(t) = C_1^H(t)x(t); \quad (6)$$

$$y_2^H(t) = C_2^H(t)x(t) + v_2^H(t), \quad (7)$$

где $y_1^H(t)$, $y_2^H(t)$ – это m_1^H , m_2^H – мерные векторы точных и зашумленных измерений соответственно; $v_2^H(t)$ – случайный процесс типа белого шума с из-

действию случайных возмущений представляется системой непрерывно-дискретных уравнений со скачками

$$E[v_2^H(t)] = 0, \quad E[v_2^H(t)v_2^H(\tau)^T] = R_{22}^H(t)\delta(t - \tau),$$

причем матрица интенсивностей $R_{22}^H(t)$ предполагается невырожденной; $C_1^H(t)$, $C_2^H(t)$ – известные матричные функции времени, причем матрица $C_1^H(t)$ имеет полный ранг на всем интервале рассмотрения системы $[t_0, t_f]$ и непрерывную вторую производную по t .

Дискретные измерения, производимые в моменты $t_k \in \theta$, удовлетворяют уравнениям

$$y_1^g(k) = C_1^g(k)x(t_k + 0); \quad (8)$$

$$y_2^g(k) = C_2^g(k)x(t_k + 0) + v_2^g(k), \quad (9)$$

где $y_1^g(k) \in \mathbb{R}^{m_1^g}$, $y_2^g(k) \in \mathbb{R}^{m_2^g}$ – векторы точных и зашумленных дискретных измерений; $v_2^g(k)$ – белый шум с известными $E[v_2^g(k)] = 0$, $E[v_2^g(k)v_2^g(i)^T] = R_{22}^g(k)\delta_{ki}$, причем матрица $R_{22}^g(k)$ предполагается невырожденной; $C_1^g(k)$, $C_2^g(k)$ – известные матричные функции, причем предполагается, что матрица $C_1^g(k)$ имеет полный ранг (что не приводит к потере общности) для всех рассматриваемых значений аргумента k , и, кроме того, выполняется требование полноты ранга блочной матрицы

$$C_1^{Hg}(k) = \begin{bmatrix} C_1^H(t_k) \\ \dots \\ C_1^g(k) \end{bmatrix}.$$

Если рассмотреть полный вектор непрерывных измерений $y^H(t) = \text{col}\{y_1^H(t), y_2^H(t)\}$, то шум измерения можно представить в виде составного вектора $v^H(t) = \text{col}\{O_{m_1^H}, v_2^H(t)\}$ с матрицей интенсивностей вида

$$R^H(t) = \begin{bmatrix} O_{m_1^H m_1^H} & | & O_{m_1^H m_2^H} \\ \dots & | & \dots \\ O_{m_2^H m_1^H} & | & R_{22}^H(t) \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Матрица интенсивностей шума полного вектора дискретных измерений $y^g(k) = \text{col}\{y_1^g(k), y_2^g(k)\}$ имеет следующий вид:

$$R^g(k) = \begin{bmatrix} O_{m_1^g m_1^g} & | & O_{m_1^g m_2^g} \\ \hline - & & - \\ O_{m_2^g m_1^g} & | & R_{22}^g(k) \end{bmatrix}. \quad (11)$$

В общем случае, когда матрицы интенсивностей шумов $R^H(t)$, $R^g(k)$ имеют произвольную структуру, но являются вырожденными матрицами рангов m_2^H , m_2^g соответственно, всегда можно выполнить преобразование исходных векторов измерения и выделить подвекторы точных измерений.

Задача оптимального непрерывно-дискретного оценивания состояния по точным и зашумленным измерениям формулируется следующим образом. Необходимо построить линейную несмещенную оценку $\hat{x}(t)$ вектора состояния линейной непрерывно-дискретной системы (1)–(3) в текущий момент времени $t \in [t_0, t_f]$ по результатам его измерения (6)–(9) на интервале $[t_0, t_f]$, оптимальную в смысле минимума критерия

$$J = E[\tilde{x}(t)^T Q(t) \tilde{x}(t)], \quad Q(t) > 0, \quad (12)$$

где $\tilde{x}(t) = \hat{x}(t) - x(t)$ – ошибка оценки.

Так как матрица интенсивностей шумов непрерывных измерений $R^H(t)$ является вырожденной, то использование алгоритма непрерывно-дискретного фильтра Калмана для решения рассмотренной задачи невозможно. Рассматриваемая задача является задачей вырожденного непрерывно-дискретного оценивания.

Полученная математическая модель является основой для дальнейшего решения задачи оптимального оценивания с вырожденной матрицей интенсивности шумов измерения с использованием принципа двойственности [16], который позволяет при готовом решении задачи оптимального управления построить на его основе решение двойственной задачи оценивания.

$$J = x^T(t_f) Q_f x(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} (x^T(t) Q^H(t) x(t) + 2x^T(t) S^H(t) u^H(t) + u^H(t)^T R^H(t) u^H(t)) dt + \\ + \sum_{k=1}^{[t_f]} (x^T(t_k - 0) Q^g(k) x(t_k - 0) + 2x^T(t_k - 0) S^g(k) u^g(k) + u^g(k)^T R^g(k) u^g(k)), \quad (16)$$

где Q_f , $Q^H(t)$, $Q^g(k)$ – заданные симметрические неотрицательно определенные матрицы соответствующих размерностей; $R^H(t)$, $R^g(k)$ – симметрические положительно определенные матрицы, $S^H(t)$, $S^g(k)$ – матрицы соответствующих размерностей, удовлетворяющие условиям неотрицательности функ-

Задача оптимального детерминированного управления линейной нестационарной непрерывно-дискретной системой с вырожденным квадратическим критерием качества

Двойственной задачей для задачи оптимального оценивания с вырожденной матрицей интенсивностей шумов измерения является задача оптимального управления с вырожденным квадратическим функционалом (с вырожденной матрицей квадратической формы при управлении в интегральном члене квадратического функционала). Данная задача в классе непрерывно-дискретных систем является двойственной к указанной задаче оценивания состояния линейной непрерывно-дискретной системы по точным и зашумленным измерениям.

Рассмотрим постановку задачи линейно-квадратического детерминированного управления для класса непрерывно-дискретных систем.

Пусть динамика непрерывно-дискретной системы описывается уравнениями

$$\dot{x}(t) = A^H(t)x(t) + B^H(t)u^H(t), \quad t_k < t < t_{k+1}; \quad (13)$$

$$x(t_k + 0) = A^g(k)x(t_k - 0) + B^g(k)u^g(k), \quad t_k \in \theta; \quad (14)$$

$$x(t_0) = x_0, \quad t \in [t_0, t_f], \quad (15)$$

где $u^H(t) \in \mathbb{R}^{m^H}$, $u^g(k) \in \mathbb{R}^{m^g}$ – векторы непрерывных и дискретных управлений; множество моментов времени θ определяется соотношением (4). Решением рассматриваемой системы является векторная функция аргумента t , непрерывно-дифференцируемая и удовлетворяющая на интервалах (t_k, t_{k+1}) дифференциальному уравнению (13) и претерпевающая скачки в моменты $t_k \in \theta$, удовлетворяющие уравнению (14).

Задача оптимального управления может быть сформулирована следующим образом. Требуется найти управления $u^H(t)$, $u^g(k)$ из класса кусочно-непрерывных и кусочно-постоянных функций, доставляющие минимум квадратическому функционалу, определенному на решениях системы (13)–(15), следующего вида:

ционала для любых x , u^H , u^g .

Оптимальные управления $u^H(t)$, $u^g(k)$ в рассматриваемой задаче определяются методом динамического программирования в рамках задачи линейно-квадратичного оптимального управления следующими соотношениями:

$$u^H(t) = -R^H(t)^{-1} \left(B^H(t)^T P(t) + S^H(t)^T \right) x(t), \quad t_k < t < t_{k+1};$$

$$u^g(k) = - \left(R^g(k) + B^g(k)^T P(t_k - 0) B^g(k) \right)^{\#} (S^g(k)^T + \\ + B^g(k)^T P(t_k + 0) A^g(k)) x(t_k - 0), \quad t_k \in \theta,$$

отражающими закон управления в виде обратной связи (здесь и ниже # означает операцию псевдообращения матрицы), где матрица $P(t)$ удовлетворяет матричному непрерывно-дискретному уравнению Риккати

$$-\dot{P}(t) = P(t) \left(A^H(t) - B^H(t) R^H(t)^{-1} S^H(t)^T \right) + \left(A^H(t) - \right. \\ \left. - B^H(t) R^H(t)^{-1} S^H(t)^T \right)^T P(t) - P(t) B^H(t) R^H(t)^{-1} B^H(t)^T P(t) + \\ + Q^H(t) - S^H(t) R^H(t)^{-1} S^H(t)^T, \quad t_k < t < t_{k+1};$$

$$P(t_k - 0) = A^g(k)^T P(t_k + 0) A^g(k) + Q^g(k) - \left(S^g(k) + A^g(k)^T P(t_k + 0) B^g(k) \right) (R^g(k) + \\ + B^g(k)^T P(t_k + 0) B^g(k))^{\#} \cdot (S^g(k) P(t_k + 0) B^g(k))^T, \quad t_k \in \theta \quad (17)$$

$$P(t_f) = Q_f. \quad (18)$$

В практике проектирования оптимальных систем управления большое внимание уделяется задачам, которые получили название вырожденных, или задач с особыми или сингулярными управлениями. В линейно-квадратической задаче такая ситуация возникает, если вырожденной является весовая матрица для управления в интегральном члене квадратического функционала качества. С практической точки зрения вырожденная постановка в линейно-квадратической задаче означает, что все или некоторые компоненты вектора управления могут принимать произвольно большие значения, не оказывая при этом влияния на значение функционала. Постановка, близкая к вырожденной, возникает, когда величины некоторых сигналов не сказываются существенно на стоимости общих затрат на управление по сравнению с другими. Линейно-квадратические задачи с вырожденной матрицей квадратической формы при управлении возникают при построении следящих систем высокой точности.

Сформулируем вырожденную задачу оптимального управления линейной детерминированной непрерывно-дискретной системой с квадратическим критерием качества.

Предположим, что на интервалах непрерывности $t_k < t < t_{k+1}$ динамика системы описывается дифференциальным уравнением вида

$$\dot{x}(t) = A^H(t)x(t) + B_s^H(t)u_s^H(t) + B_N^H(t)u_N^H(t), \quad (19)$$

где $u^H(t) = \text{col}\{u_s^H(t), u_N^H(t)\}$ – полный вектор управления; $u_s^H(t) \in \mathbb{R}^{m_s^H}$ – сингулярный подвектор управления; $u_N^H(t) \in \mathbb{R}^{m_N^H}$ – несингулярный подвектор управления; $A^H(t)$ – непрерывно-дифференцируемая матричная функция; $B_s^H(t)$, $B_N^H(t)$ – известные матричные функции, причем $B_s^H(t)$ дважды непрерывно-дифференцируема и имеет полный ранг на всем интервале $[t_0, t_f]$. В дискретные моменты $t_k \in \theta$ состояние претерпевает скачок в соответствии с уравнением (14). Необходимо определить оптимальные управления $u_s^H(t)$, $u_N^H(t)$, $u^g(k)$, доставляющие минимум квадратическому функционалу, определенному на решениях системы (17), (19) и условием (18) вида

$$J = x^T(t_f) Q_f x(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} (x^T(t) Q^H(t) x(t) + u_N^H(t)^T R_N^H(t) u_N^H(t)) dt + \\ + \sum_{k=1}^{[t_f]} (x^T(t_k - 0) Q^g(k) x(t_k - 0) + 2x^T(t_k - 0) S^g(k) u^g(k) + u^g(k)^T R^g(k) u^g(k)). \quad (20)$$

Подвектор $u_s^H(t)$ управления $u^H(t)$ не входит в функционал, и, следовательно, представленный функционал соответствует функционалу относительно $u^H(t)$ с вырожденной матричной квадратической формой следующего вида:

$$R^H(t) = \begin{bmatrix} O_{m_1^H m_1^H} & O_{m_1^H m_2^H} \\ O_{m_2^H m_1^H} & R_N^H(t) \end{bmatrix}.$$

Вектор-функции $u_N^H(t)$ ищется в классе кусочно-непрерывных функций, а $u_s^H(t)$ – в классе обобщенных функций. Используемое в (20) разбиение вектора управления на сингулярный $u_s^H(t)$ и несингулярный $u_N^H(t)$ подвекторы может быть выполнено с помощью преобразования в пространстве управлений, т. к. для любой неоптимально определенной симметрической матрицы $R^H(t)$ ранга m_2^H существует ортогональная матрица $T(t)$, такая, что $T(t)R^H(t)T(t)^T$, имеет представленную выше блочную структуру и, определяя новый вектор управления в виде $T(t)^T u^H(t)$, можно выполнить соответствующее разбиение на подвекторы. Остальные матрицы квадратических форм определяются так же, как в невырожденной задаче.

Задачи линейной оптимальной фильтрации и линейного оптимального детерминированного управления с квадратичным критерием качества связаны соотношением двойственности. Двойственной к задаче оценивания по совокупности точных и зашумленных измерений является задача детерминирован-

ного управления линейной системой с квадратичным критерием качества, содержащим квадратическую форму относительно некоторого подвектора управлений. Пусть непрерывно-дискретная система оптимизации определяется уравнениями

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A^H(t)x(t) + w^H(t), \quad t_k < t < t_{k+1}; \\ x(t_k + 0) &= A^g(k)x(t_k - 0) + w^g(k), \quad t_k \in \Theta; \\ x(t_0 - 0) &= x_0, \quad t \in [t_0, t_f],\end{aligned}$$

где все элементы описаны выше. Определим критерий качества оценки $\hat{x}(t)$ вектора состояния в виде

$$J = M[a^T \tilde{x}(t)]^2, \quad \tilde{x}(t) = \hat{x}(t) - x(t), \quad (21)$$

где a – произвольный мерный вектор. Общая форма линейной оценки имеет вид

$$a^T \hat{x}(t) = b^T(t) \bar{x}_0 - \int_{t_0}^t (u_1^H(\tau)^T y_1^H(\tau) + u_2^H(\tau) y_2^H(\tau)) d\tau - \sum_{k=1}^{[t]} u^g(k)^T y^g(k),$$

где весовые коэффициенты $u_1^H(\tau)$, $u_2^H(\tau)$, $u^g(k)$ как функции времени должны быть выбраны таким образом, чтобы оценка $\hat{x}(t)$ была несмещенной и доставляла минимум функционалу.

Для линейных непрерывно-дискретных операторов можно определить характеристическое тождество [11] с вспомогательным вектором $\xi \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}& \int_{t_0}^t (\xi^T(\tau)(A^H x)(\tau) - (A_*^H \xi^T)(\tau)x(\tau)) d\tau + \\& + \sum_{k=1}^{[t]} (\xi^T(t_k + 0)(A^g x)(t_k + 0, t_k - 0) - (A_*^g \xi^T)(t_k - 0, t_k + 0)x(t_k - 0)) = \xi^T(t)x(t) - \xi^T(t_0)x(t_0),\end{aligned}$$

где $(A^H x)(\tau)$, $(A^g x)(t_k + 0, t_k - 0)$ – операторы исходной системы, определяющиеся соотношениями

$$(A^H x)(\tau) = \dot{x}(\tau) - A^H(\tau)x(\tau) = w^H(\tau), \quad t_k < \tau < t_{k+1};$$

$$(A^g x)(t_k + 0, t_k - 0) = x(t_k + 0) - A^g(k)x(t_k - 0) = w^g(k), \quad t_k \in \Theta,$$

а $(A_*^H \xi^T)(\tau)$, $(A_*^g \xi^T)(t_k - 0, t_k + 0)$ – соответствующие сопряженные операторы вида

$$\begin{aligned}(A_*^H \xi^T)(\tau) &= -\dot{\xi}^T(\tau) - \xi^T(\tau)A^H(\tau), \quad t_k < \tau < t_{k+1}; \\ (A_*^g \xi^T)(t_k - 0, t_k + 0) &= \xi(t_k - 0) - \xi^T(t_k + 0)A^g(k), \quad t_k \in \Theta.\end{aligned}$$

Воспользуемся предоставленным тождеством для определения уравнений сопряженной системы.

Определим сопряженную систему следующими уравнениями

$$\begin{aligned}\dot{\xi}(t) &= -A^{HT}(t)\xi(t) - C_1^H(t)^T u_1^H(t) - C_2^H(t)^T u_2^H(t); \\ \xi(t_k - 0) &= A^Q(k)^T \xi(t_k + 0) + A^Q(k)^T C^Q(k)^T u^Q(k)\end{aligned}$$

с граничным условием $\xi(t) = a$.

Учитывая определение сопряженной системы

и центрирование случайных шумов, получаем выражение для критерия (21) в виде

$$J = \xi^T(t_0) \Sigma_0 \xi(t_0) + \int_{t_0}^t \left(\xi^T Q \xi + u_2^{H^T} R_{22}^H u_2^H \right) d\tau + \sum_{k=1}^l \left(\xi^T(t_k + 0) Q^g(k) \xi(t_k + 0) + \right. \\ \left. + 2 \xi^T(t_k + 0) Q^g(k) C^g(k) u^g(k) + u^g(k)^T (C^g(k) Q^g(k) C^g(k)^T + R^g(k)) u^g(k) \right).$$

Таким образом, векторные функции $u_1^H(\tau)$, $u_2^H(\tau)$, $u^g(k)$ являются управляющими для сопряженной системы и должны быть выбраны так, чтобы функционал (21), определенный на ее решениях, принимал минимальное значение.

Модель движения АНПА с вырожденными матрицами шумов

Рассмотрим пример, который демонстрирует применение теории вырожденного непрерывно-дискретного оценивания к навигационной системе АНПА. Ключевая особенность состоит в использовании высокоточных непрерывных и дискретных измерений (ССН, гидроакустика) в сочетании с точными каналами ИНС, что приводит к вырожденным матрицам интенсивностей шумов. Использование принципа двойственности позволяет свести задачу оценивания к задаче оптимального управления с вырожденным функционалом, для которого применимы стандартные методы синтеза оптимального наблюдателя с пониженным порядком динамической части оценщика, что потенциально сокращает вычислительные затраты на реализацию алгоритма.

Рассматривается движение АНПА в горизонтальной плоскости вдоль оси x . К АНПА прилагается управляющее воздействие, создающее силу тяги F , а за счет воды на корпус действует сила сопротивления $F_c = \alpha(t)v(t)$, что дает дифференциальное уравнение

$$M\dot{x}(t) = F - F_c, \quad (22)$$

где M – приведенная масса АНПА, $\alpha(t) > 0$ моделирует неизвестные компоненты гидродинамического сопротивления аппарата и может изменяться во времени вследствие изменения глубины, режима движения и внешних условий. Формуле (22) соответствует система

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = v(t), \\ \dot{v}(t) = -\frac{1}{M}\alpha(t)v(t) + \frac{1}{M}F, \end{cases} \quad (23)$$

где $x(t)$ – координата аппарата; $v(t)$ – продольная скорость.

При переходе от (22) и (23) к уравнению вида (1), для описания непрерывной динамики между дискретными моментами t_k , состояние описывается вектором $x(t) = \text{col}\{x(t), v(t)\}$, а матрицы системы и управления определяются, соответственно, как

$$A^H = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\alpha(t)/M \end{bmatrix}; \quad B^H = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/M \end{bmatrix},$$

и, таким образом, рассматриваемая модель представляет собой линейную нестационарную систему, что согласуется с общей постановкой задачи оптимального оценивания. Поэтому при рассмотрении данного примера в уравнении (1) $u^H(t)$ – продольная тяга, $w^H(t)$ – возмущения (волновые и модельные ошибки). В дискретные моменты t_k учитывается коррекция состояния, например резкий маневр или импульсное управление балластом, по формуле (2), где для маневров «рысканье–подруливание»

$$A^g(k) = I_2; \quad B^g(k) = \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta v_k \end{bmatrix}.$$

Начальное состояние задается по формуле (3)

$$x(t_0 - 0) = x_0 = \text{col}\{x_0, v_0\},$$

где x_0, v_0 определяются результатами предварительной калибровки навигации АНПА.

Предполагается, что непрерывные измерения формируются с помощью ИНС и датчиком скорости, а дискретные – во время всплытия от ССН. Полные непрерывные и дискретные измерения описываются уравнениями (5).

Согласно (6) и (7) разобьем непрерывные измерения на две группы. Предположим, что угол курса, определенный высокоточным гироскопом, перенесен в состояние таким образом, что один из выходов ИНС можно считать практически без шума (например, виртуальный «точный» канал положения вдоль траектории после внутренней фильтрации).

Согласно (6) точный канал непрерывных измерений вдоль пути

$$y_1^H(t) = C_1^H x(t), \quad C_1^H = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Зашумленный канал непрерывных измерений, согласно (7):

$$y_2^H(t) = C_2^H x(t) + v_2^H(t), \quad C_2^H = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

это оценка скорости по доплеровскому лагу, $v_2^H(t)$ – белый шум с матрицей интенсивностей $R_{22}^H > 0$.

Дискретные измерения АНПА включают ССН при всплытии или гидроакустический маяк согласно (8) и (9).

Согласно (8) точный канал дискретных измерений

$$y_1^g(k) = C_1^g(k)x(t_k + 0), \quad C_1^g(k) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

это практически точное измерение координаты при выходе антенны на поверхность.

Зашумленный канал дискретных измерений (по (9)):

$$y_2^g(k) = C_2^g(k)x(t_k + 0) + v_2^g(k), \quad C_2^g(k) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

это зашумленное измерение скорости по гидроакустическому доплеру, $v_2^g(k)$ – белый шум с невырожденной матрицей $R_{22}^g(k)$.

Матрица интенсивностей шума полного вектора непрерывных и дискретных измерений (10), (11) являются вырожденными, имея нулевые подблоки, соответствующие точным каналам измерений.

Как отмечалось выше, задача вырожденного непрерывно-дискретного оценивания состояния АНПА формулируется как задача построения линейной несмещенной оценки $\hat{x}(t)$ вектора состояния по всем доступным измерениям (6)–(9) на интервале $[t_0, t_f]$ с минимизацией функционала (12):

$$J = E[\tilde{x}^T(t)Q(t)\tilde{x}(t)], \quad Q(t) > 0.$$

Для АНПА удобно выбирать матрицу $Q(t)$ так, чтобы сильнее штрафовать ошибки по координате, а не по скорости, например

$$Q(t) = \text{diag}\{q_x, q_v\}, \quad q_x \gg q_v$$

соответствует более жестким требованиям к отклонению от заданной траектории.

Построенный вырожденный непрерывно-дискретный наблюдатель АНПА обеспечивает минимум средней квадратической ошибки навигации при учете точных и зашумленных каналов измерений.

Двойственной к описанной задаче оценивания для АНПА является задача оптимального детерминированного управления с квадратическим критерием, определенным формулами (13)–(16). Динамика системы управления АНПА описывается

уравнениями (13) и (14). Вектор управляющих воздействий $u^H(t) = \text{col}\{u_s^H(t), u_N^H(t)\}$ разбивается на сингулярную $u_s^H(t)$ и несингулярную $u_N^H(t)$ части согласно формуле (19). Квадратический функционал для задачи управления АНПА определен формулой (20). При этом подвектор $u_s^H(t)$ управления не входит в функционал, что соответствует вырожденной матричной квадратической форме $R^H(t)$. На практике для АНПА это означает, что некоторые управляющие воздействия (например, мелкие коррекции курса) практически не ограничены по энергозатратам по сравнению с основным двигателем.

Заключение

В статье рассмотрена задача оптимального вырожденного непрерывно-дискретного оценивания состояния линейной системы управления АНПА при наличии совокупности точных и зашумленных измерений. Показано, что в практических навигационных системах АНПА вырожденность матрицы интенсивностей шумов измерений возникает естественным образом, когда часть измерительных каналов обладает более высокой точностью по сравнению с остальными, что позволяет пренебречь шумами в соответствующих измерениях. Сформулирована математическая постановка задачи вырожденного непрерывно-дискретного оценивания. На основе применения принципа двойственности получена математическая модель оптимального наблюдателя, характеризующаяся уменьшением порядка динамической части оценщика по сравнению с исходной системой.

Разработанная модель позволяет корректно учитывать комбинированную навигационную информацию от непрерывных и дискретных источников. Для разработанной модели горизонтального движения АНПА рассмотрен пример.

Полученные результаты могут быть использованы при проектировании навигационно-управляющих систем АНПА, функционирующих в условиях прерывистой доступности внешних навигационных средств. В дальнейшем планируется развитие полученных результатов в направлении синтеза алгоритмов оптимального вырожденного оценивания для нелинейных моделей движения АНПА.

Список источников

1. Fossen T. I. Handbook of marine craft hydrodynamics and motion control. Hoboken, NJ: Wiley, 2021. 710 p.
2. Kramar V., Kabanov A., Dementiev K. Autonomous Underwater Vehicle Navigation via Sensors Maximum-Ratio Combining in Absence of Bearing Angle Data // JMSE. 2023. V. 11. N. 10. P. 1847.
3. Щербатюк А. Ф. О методе навигации группы АНПА без использования гидроакустических маяков // Гиропскопия и навигация. 2022. Т. 30. № 4 (119). С. 106–121.
4. Kramar V., Dementiev K., Kabanov A. Optimal state estimation in underwater vehicle discrete-continuous measurements via augmented hybrid Kalman filter // JMSE. 2025. V. 13. N. 5. P. 933.
5. Кабанов А. А., Крамарь В. А., Деметьев К. В. Алгоритм оптимального комплексирования оценки состояний в дискретно-непрерывных системах АНПА // Изв. ЮФУ. Технические науки. 2024. № 5 (241). С. 16–28.

6. Xincun Y., Yongzhong O., Fuping S., Hui F. Kalman filter applied in underwater integrated navigation system // *Geodesy and Geodynamics*. 2013. V. 4. N. 1. P. 46–50.
 7. Potokar E., Norman K., Mangelson J. Invariant Extended Kalman Filtering for Underwater Navigation // *IEEE Robotics and Automation Letters*. 2021. V. 6. N. 3. P. 5792–5799.
 8. Singh R. K., Saha J., Bhaumik S. Maximum Correntropy Polynomial Chaos Kalman Filter for Underwater Navigation // *Digit. Signal Process.* 2024. V. 155. P. 104774.
 9. Sheng G., Liu X., Sheng Y., Cheng X., Luo H. Cooperative Navigation Algorithm of Extended Kalman Filter Based on Combined Observation for AUVs // *Remote Sensing*. 2023. V. 15. N. 2. P. 533.
 10. Allotta B., Costanzi R., Fanelli F., Monni N., Paolucci L., Ridolfi A. Sea currents estimation during AUV navigation using Unscented Kalman Filter // *IFAC-PapersOnLine*.

2017. V. 50. N. 1. P. 13668–13673.
 11. Зорич В. А. Математический анализ. М.: МЦНМО, 2012. Ч. II. 818 с.
 12. Барабанов А. Т. Анализ и оптимизация функционально сложных систем гриновского типа на основе характеристического тождества // *Адаптивные системы автоматического управления*. 1981. № 9. С. 3–12.
 13. Зеликин М. И. Оптимальное управление и вариационное исчисление. М.: ЛЕНАНД, 2017. 160 с.
 14. Квакернаак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления. М.: Мир, 1977. 650 с.
 15. Брайсон А. Е., Хо Ю-Ши. Прикладная теория оптимального управления. М.: Мир, 1972. 544 с.
 16. Орлов Ю. В. Расширенный фильтр Калмана при вырожденных условиях // *Вестн. СПбГУ. Сер. 1*. 2005. Т. 2. С. 46–54.

References

1. Fossen T. I. *Handbook of marine craft hydrodynamics and motion control*. Hoboken, NJ, Wiley, 2021. 710 p.
 2. Kramar V., Kabanov A., Dementiev K. Autonomous Underwater Vehicle Navigation via Sensors Maximum-Ratio Combining in Absence of Bearing Angle Data. *JMSE*, 2023, vol. 11, no. 10, p. 1847.
 3. Shcherbatyuk A. F. O metode navigacii gruppy ANPA bez ispol'zovaniya gidroakusticheskikh mayakov [About the method of navigation of the AUUV group without the use of sonar beacons]. *Giroskopiya i navigaciya*, 2022, vol. 30, no. 4 (119), pp. 106–121.
 4. Kramar V., Dementiev K., Kabanov A. Optimal state estimation in underwater vehicle discrete-continuous measurements via augmented hybrid Kalman filter. *JMSE*, 2025, vol. 13, no. 5, p. 933.
 5. Kabanov A. A., Kramar V. A., Dement'ev K. V. Algoritim optimal'nogo kompleksirovaniya ocenki sostoyaniy v diskretno-neprieryvnyh sistemah ANPA [An algorithm for optimal integration of state estimation in discrete-continuous AUUV systems]. *Izvestiya YUFU. Tekhnicheskie nauki*, 2024, no. 5 (241), pp. 16–28.
 6. Xincun Y., Yongzhong O., Fuping S., Hui F. Kalman filter applied in underwater integrated navigation system. *Geodesy and Geodynamics*, 2013, vol. 4, no. 1, pp. 46–50.
 7. Potokar E., Norman K., Mangelson J. Invariant Extended Kalman Filtering for Underwater Navigation. *IEEE Robotics and Automation Letters*, 2021, vol. 6, no. 3, pp. 5792–5799.
 8. Singh R. K., Saha J., Bhaumik S. Maximum Correntropy Polynomial Chaos Kalman Filter for Underwater Navigation.

Digit. Signal Process, 2024, vol. 155, p. 104774.
 9. Sheng G., Liu X., Sheng Y., Cheng X., Luo H. Cooperative Navigation Algorithm of Extended Kalman Filter Based on Combined Observation for AUVs. *Remote Sensing*, 2023, vol. 15, no. 2, pp. 533.
 10. Allotta B., Costanzi R., Fanelli F., Monni N., Paolucci L., Ridolfi A. Sea currents estimation during AUV navigation using Unscented Kalman Filter. *IFAC-PapersOnLine*, 2017, vol. 50, no. 1, pp. 13668–13673.
 11. Zorich V. A. *Matematicheskij analiz* [Mathematical analysis]. Moscow, MCNMO, 2012. Part II. 818 p.
 12. Barabanov A. T. Analiz i optimizaciya funkcional'no slozhnyh sistem grinovskogo tipa na osnove harakteristicheskogo tozhdestva [Analysis and optimization of functionally complex Green type systems based on the characteristic identity]. *Adaptivnye sistemy avtomaticheskogo upravleniya*, 1981, no. 9, pp. 3–12.
 13. Zelikin M. I. *Optimal'noe upravlenie i variacionnoe ischislenie* [Optimal control and calculus of variations]. Moscow, LENAND, 2017. 160 p.
 14. Kvakernaak H., Sivan R. *Linejnye optimal'nye sistemy upravleniya* [Linear optimal control systems]. Moscow, Mir Publ., 1977. 650 p.
 15. Brajson A. E., Ho Yu-Shi. *Prikladnaya teoriya optimal'nogo upravleniya* [Applied theory of optimal control]. Moscow, Mir Publ., 1972. 544 p.
 16. Orlov Yu. V. Rasshirennyj fil'tr Kalmana pri vyrozhdennyh usloviyah [Extended Kalman filter under degenerate conditions]. *Vestnik SPbGU. Seriya 1*, 2005, vol. 2, pp. 46–54.

Статья поступила в редакцию 21.01.2026; одобрена после рецензирования 25.05.2026; принята к публикации 29.06.2026
 The article was submitted 21.01.2026; approved after reviewing 25.05.2026; accepted for publication 29.06.2026

Информация об авторах / Information about the authors

Вадим Александрович Крамарь – доктор технических наук, профессор; заведующий кафедрой искусственного интеллекта и автономных систем управления; Севастопольский государственный университет; kramarv@mail.ru

Vadim A. Kramar – Doctor of Technical Sciences, Professor; Head of the Department of Artificial Intelligence and Autonomous Control Systems; Sevastopol State University; kramarv@mail.ru

Дмитрий Викторович Ко – лаборант-исследователь кафедры искусственного интеллекта и автономных систем управления; Севастопольский государственный университет; kodmitrywork@gmail.com

Иван Юрьевич Липко – кандидат технических наук; старший преподаватель кафедры искусственного интеллекта и автономных систем управления; Севастопольский государственный университет; ivanlipko@yandex.ru

Роман Денисович Якунин – ассистент кафедры искусственного интеллекта и автономных систем управления; Севастопольский государственный университет; goodroma1404@gmail.com

Dmitrii V. Ko – Research Assistant of the Department of Artificial Intelligence and Autonomous Control Systems; Sevastopol State University; kodmitrywork@gmail.com

Ivan Yu. Lipko – Candidate of Technical Sciences; Senior Lecturer of the Department of Artificial Intelligence and Autonomous Control Systems; Sevastopol State University; ivanlipko@yandex.ru

Roman D. Yakunin – Lecturer of the Department of Artificial Intelligence and Autonomous Control Systems; Sevastopol State University; goodroma1404@gmail.com

